OMM - Linearne diferencne jednačine

April 10, 2023

Malo podsećanje

$$(1-x^2)\frac{d^2 T_n}{dx^2} - x\frac{dT_n}{dx} + n^2 T_n = 0$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

$$T_n(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n}{2}$$

Diferencne jednačine

Diferencijalna jednačina (Košijev zadatak): $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$, $t(t_0) = a$.
Diferencna jednačina (Ojlerova eksplicitna metoda za rešavanje Košijevog zadatka): $u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot f(t_n, u_n)$, $u_0 = a$.

- Diskretan skup $t_0, t_1, ...$
- Diskretne vrednosti $u_0, u_1, ...$

Radićemo:

- Linearne DJ
- Nelinearne DJ
- Sistemi DJ

Red diferencne jednačine jednak je maksimalnoj razlici indeksa koji se javljaju u toj jednačini.

- DJ prvog reda
- DJ višeg reda

Linearne diferencne jednačine prvog reda

Štednja

Uložite $K_0 = K(0)$ dinara na račun kod banke, koja plaća p% kamate na svaki ugovoren period Δt (mesec dana, godinu dana,...). Koliko je stanje na vašem računu posle ugovorenog perioda?

$$\boxed{K(t+\Delta t) = \left(1 + \frac{p}{100}\right) K(t)}$$

$$\boxed{K_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) K_0}$$

Koliko je stanje na računu posle n ugovorenih perioda?

$$\boxed{K_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n K_0}$$

Penziona štednja

- kapital K (stanje na računu)
- kamatna stopa p (data kao decimalni zapis)
- I interes/kamata (nadoknada, koliko se uvećao iznos)

Krećemo sa praznim računom. Svakog meseca izdvajamo u (privatni) penzioni fond neki fiksirani novčani iznos A. Posle svakog meseca banka/osiguranje/penzioni fond uvećava vaš kapital za kamatu u iznosu p. Pretpostavka je da nema inflacije. Koliki će biti kapital kad odete u penziju?

$$\boxed{K_{n+1} = (1+p)\,K_n + A, \quad K_0 = 0}$$

$$\boxed{K_n = \frac{A}{p}\left[(1+p)^n - 1\right]}$$

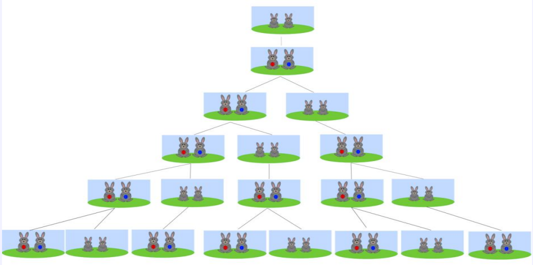
Primer:
30 godina ulažemo po A dinara svakog meseca po mesečnoj kamatnoj stopi 0.5% ($p = 0.005$).
Posle 30 godina:
slamarica: 360A
štednja: 1004.515A

- Komforna kamatna stopa - dobija se isti iznos interesa bez obzira da li se kamata obračunava jedanput na kraju perioda otplate ili više puta u toku same otplate kredita
- Proporcionalna kamatna stopa - dobija se različit iznos interesa u zavisnosti od toga da li se kamata obračunava jedanput na kraju perioda otplate ili više puta u toku same otplate kredita

Šta više odgovara nama, a šta bankama?
Da li usitnjavanjem perioda okamačivanja po proporcionalnom sistemu bi mogli da se (neograničeno) obogatimo $K_n = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n K_0$?

Linearne diferencne jednačine višeg reda

Razmnožavanje zečeva



- Par zečeva (M i Ž) su pušteni na livadu.
- Zečevi postaju polno zreli sa mesec dana.
- Trudnoća zečice traje mesec dana nakon čega na svet donosi novi par zečeva (M i Ž).
- Zečevi nikad ne umiru.
- Upareni zečevi nastavljaju da reprodukuju novi par zečeva na svakih mesec dana.

Koliko će biti zečeva za godinu dana?

- n - redni broj meseca
- Z_n - broj zečeva u trenutku (mesecu) n
- M_n - broj parova mladih zečeva
- O_n - broj parova odraslih zečeva

Ukupan broj zečeva u mesecu n: $Z_n = 2(M_n + O_n)$
Broj mladih zečeva u sledećem mesecu $n+1$: $M_{m+1} = O_n$
Broj odraslih zečeva u sledećem mesecu $n+1$: $O_{m+1} = O_n + M_n$

$$\left.\begin{aligned} M_{m+1} &= O_n \\ O_{m+1} &= O_n + M_n \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \qquad \boxed{O_{n+1} = O_n + O_{n-1}}$$

Sistem 2 diferencne jednačine prvog reda
$O_0 = 0, M_0 = 1$

Diferencna jednačina drugog reda
$O_0 = 0, O_1 = 1$

Broj parova odraslih zečeva:

$$O_{n+1} = O_n + O_{n-1} \Longrightarrow \boxed{O_n = \frac{\lambda_1^n - (1-\lambda_1)^n}{\sqrt{5}},\ \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Fibonačijev niz: $F_n = O_n$

Broj parova mladih zečeva:
$M_n = O_{n-1}$
$M_n = F_{n-1}$

Ukupan broj zečeva:
$Z_n = 2(O_n + M_n) = 2(F_n + F_{n-1}) = 2F_{n+1}$

Sistemi linearnih diferencnih jednačina prvog reda

Bitke

- Dve suprotstavljene vojne sile A i B.
- A i B ratuju jedni naspram drugih.
- Gubici jedne strane zavise od brojnosti suparničke vojske i od ubojitosti njihovog oružija, istreniranosti vojske, morala...
- Nema pojačanja, obnove vojske,...
- Ograničimo se na diskretne vremenske periode (5min, 10min, 30min, 1h,...) i pretpostavimo da nisu mnogo dugi.
- Zanima nas tok bitke.

$$\boxed{\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n - aB_n, \quad A_0 = A0 \\ B_{n+1} &= B_n - bA_n, \quad B_0 = B0 \end{aligned}}$$

Lanchester model

Sistem LDJ prvog reda

- A_n - brojno stanje strane A u trenutku n
- B_n - brojno stanje strane B u trenutku n
- $a \in (0, 1)$ - "ubojitost" strane B
- $b \in (0, 1)$ - "ubojitost" strane A

Uopštenje modela:
$A_n, B_n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R} \implies A_n, B_n \in \mathbb{R}$

Oblast važenja modela:
$A_n, B_n \geq 0$

Matrični zapis:

$$\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = M^{n+1} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$$

Šta želimo da znamo?

- Za zadate A_0, B_0, a, b, ko će da pobedi?
- Kada će da se završi bitka?

Podsećanje linearne algebre

Za zadatu kvadratnu matricu A reda n, polinom $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *se naziva* ***karakteristični polinom*** *matrice A.*

Nule $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *karakterističnog polinoma su* ***sopstvene vrednosti matrice*** *A.*

Svakoj sopstvenoj vrednosti λ_i odgovara sopstveni vektor v_i. Sopstveni vektori v_i su netrivijalna ($v_i \neq \mathbf{0}$) rešenja jednačine $Av_i = \lambda_i v_i$.

Sopstveni vektori su jedinstveni do na konstantu.

Sopstveni vektori $v_1, ..., v_n$ koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima $\lambda_1, ..., \lambda_n$ su međusobno linearno nezavisni (čine bazu).

Svaki element nekog vektorskog prostora se može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija elemenata baze tog prostora.

Zbog $Av_i = \lambda_i v_i \Longrightarrow$ množenje vektora v_i matricom A ne menja pravac vektora v_i (može promeniti samo intenzitet i smer).

Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori matrice M:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -b & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = 1 - \sqrt{ab},\ v_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 + \sqrt{ab},\ v_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{b} \end{bmatrix}$$

Vektor $\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$ je linearna kombinacija v_1 i v_2:

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2, \quad c_1 = \frac{\sqrt{b}A_0 + \sqrt{a}B_0}{2\sqrt{ab}},\ c_2 = \frac{\sqrt{b}A_0 - \sqrt{a}B_0}{2\sqrt{ab}}$$

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = M^n \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = M^n(c_1 v_1 + c_2 v_2) = \dots = c_1 \lambda_1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2}\left(A_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}B_0\right)(1-\sqrt{ab})^n + \frac{1}{2}\left(A_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}B_0\right)(1+\sqrt{ab})^n \\ B_n &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 + B_0\right)(1-\sqrt{ab})^n - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 - B_0\right)(1+\sqrt{ab})^n \end{aligned}}$$

Ko će da pobedi?

$$\boxed{\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2}\left(A_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}B_0\right)(1-\sqrt{ab})^n + \frac{1}{2}\left(A_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}B_0\right)(1+\sqrt{ab})^n \\ B_n &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 + B_0\right)(1-\sqrt{ab})^n - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 - B_0\right)(1+\sqrt{ab})^n \end{aligned}}$$

Diskusija: ...

Zaključak:

- $\sqrt{b}A_0 - \sqrt{a}B_0 > 0$: Pobeđuje A.
- $\sqrt{b}A_0 - \sqrt{a}B_0 < 0$: Pobeđuje B.
- $\sqrt{b}A_0 - \sqrt{a}B_0 = 0$: "nerešeno".

Kada će bitka biti gotova?

- Pretpostavimo da je pobedio A. To znači da je $B_n \leq 0$ u nekom trenutku n.

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 + B_0\right)(1-\sqrt{ab})^n \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 - B_0\right)(1+\sqrt{ab})^n$$

$$\Longrightarrow \boxed{n \geq \frac{\ln(\sqrt{b}A_0 + \sqrt{a}B_0) - \ln(\sqrt{b}A_0 - \sqrt{a}B_0)}{\ln(a+\sqrt{ab}) - \ln(1-\sqrt{ab})}}$$

Bitka kod Trafalgara

- Pomorska bitka 21.10.1805.
- Najznačajnija bitka Napoleonovih ratova.
- Sa jedne strane Britanci predvođeni Nelsonom.
- Sa druge strane koalicija Francuske i Španije.
- Britanci su imali 27 brodova.
- Francuska i Španija su zajedno imali 33 broda.

(Karikiran) primer

- Britanci $A_0 = 27$, Francuzi i Španci $B_0 = 33$.
- A i B podjednako ubojiti $a = b = 0.05$.
- B na početku izdeljen u 3 grupe: G1 sa 3 broda, G2 sa 17 brodova, G3 sa 13 brodova.

Tok bitke

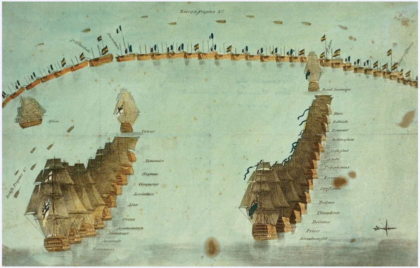
I faza: A šalje 13 brodova na G1 od B:
$A_0 = 13, B_0 = 3 \Longrightarrow A_3 = 12.6471, B_3 = 1.0709$

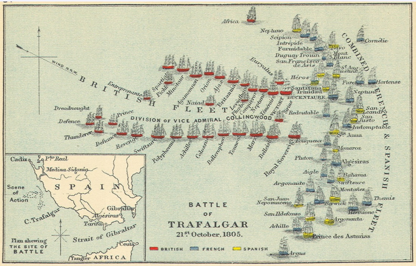
II faza: A dodaje preostalih 14 brodova i napada grupu G2 i ostatke G1:
$A_0 = 26.6471, B_0 = 18.0709 \Longrightarrow A_{15} = 19.2734, B_{15} = 1.4441$

III faza: A napada i grupu G3 i ostatke G2
$A_0 = 19.2734, B_0 = 14.4441 \Longrightarrow A_{17} = 12.5834, B_{17} = 1.5146$

B se povlači, A pobeđuje.

Stvarnost





Време:	21. октобар 1805.
Место:	рт Трафалгар, Шпанија
Исход:	одлучујућа британска победа

Сукобљене стране	
Уједињено Краљевство	Француска Шпанија
Команданти и вође	
Хорејшио Нелсон †	Пјер-Шарл Вилнев
Јачина	
27 бродова	33 брода
Жртве и губици	
449 мртвих 1.214 рањених	4.480 мртвих 2.250 рањених 7.000 заробљених 21 заробљен брод и 1 разнесен